

一种新型多维通量函数 在求解平面叶栅跨音速流动的应用

清华大学 么石磊* 王保国 沈孟育

【摘要】 采用一种改进的 Roe 格式对平面叶栅的无粘流动进行了数值模拟, 并与 Roe 格式的计算结果进行了比较。采用四阶 Runge- Kutta 时间差分格式, 空间三阶有限体积法。网格生成采用贴体网格近壁面修正的方法。计算结果表明, 该格式在减少格式对网格的依赖性, 抑制数值粘性方面具有明显的作用。

主题词: 多维分析 平面叶栅 跨音速流动

分类号: O 354. 2

1 引言

近年来, 在跨音速叶栅流动的数值模拟中, 建立在求近似黎曼解基础上 Roe 格式在计算中得到了成功的应用。但这种格式是以一维黎曼问题为基础建立的, 在一维计算中它具有高效、精确等优点; 在二维或三维问题中, 当格式精度为一阶或二阶时, 其对网格的依赖性明显加强^[1]。过去几年里, 有许多理论和数值研究试图改善这种格式对网格的依赖。一种方法是适应性网格方法, 通过调节当地网格, 特别是对激波等间断处的网格进行调整, 使网格法方向与主导波的传播方向一致。这种方法在间断处能获得较精确的解, 但是网格调整的效率可能是该方法的一个关键问题, 而且目前尚未弄清在光滑区域如何调整网格。第二种方法是用高阶数据重构(HOR)方法减少低精度格式所造成的数值格式耗散。但数值分析^[2]表明该方法最高只能达到二阶精度, 而且有计算结果表明^[3]该方法对网格的依赖性仍然很强。第三种方法是建立在更符合 Euler 方程物理特征分析基础上的特征波分裂方法。Rotated 迎风格式就是其中最为有效的一种, 它将特征波分解成几部分, 每部分都有各自的传播方向和振幅。数值模拟表明^[4], 该方法对减少对网格的依赖和抑制数值粘性有着明显的效果。跨音速叶栅内部流动复杂, 计算单元界面的特征波传播方向难于判断。本文采用一种改进的 Roe 格式对平面叶栅跨音速流动的粘性和无粘流场进行了数值模拟, 取得了令人满意的结果。该方法较容易推广到三维情况。

2 支配方程与通量函数的构造

二维无量纲 Navier- Stokes 方程可以表示为:

$$\partial U / \partial \tau + \partial F / \partial \alpha + \partial G / \partial \beta = \partial F_v / \partial \alpha + \partial G_v / \partial \beta \quad (1)$$

在有限体积格式中, 上述方程的离散形式为:

$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial \tau} = - \frac{1}{A_{i,j}} \left\{ \sum_{l=1}^4 \Phi_l \Delta S_l - \sum (\Phi_l)_l \Delta S_l \right\}_{i,j} \quad (2)$$

Roe 格式中, 采用 Roe 平均来线化 Jacobian 矩阵 $C = \partial \Phi / \partial U$, 每个计算单元界面的通量可由下式求得:

$$\Phi = \frac{1}{2} (\Phi_L + \Phi_R) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 |\lambda_k| \Omega_k R_k \quad (3)$$

式中, R_k 为特征向量沿计算单元界面外法线方向的分量, Ω_k 为特征向量的振幅 (具体表达式见文献[5]), 特征值: $\lambda_1 = q_g + a$, $\lambda_2 = q_g - a$, $\lambda_3 = q_g$, $\lambda_4 = q_g$ 为特征波的传播速度沿界面外法线的各速度分量, 下标 g 表示沿网格外法线方向; λ_1 和 λ_2 为声波的传播速度 λ_3 为剪切波的传播速度, λ_4 为熵波的传播速度。

在一维计算中, 特征波的传播方向与计算单元界面的外法线方向一致 (或反向), 这种特征波的分解方式符合 Euler 方程的物理特征。但是, 在二维或三维的流场计算中, 特征波的传播方向是空间任意方向的, 未必与界面的外法向一致, 这种特征波分解方式不满足 Euler 方程的物理特征。为此采用下面的特征波分解方法。

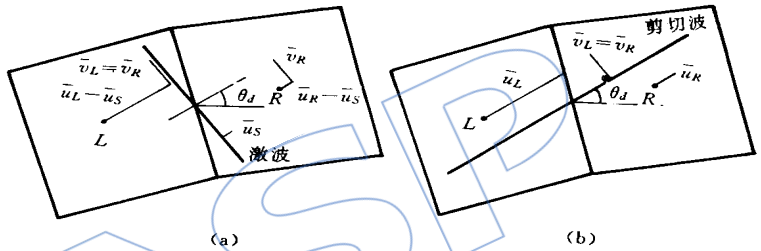


图 1 特征值分解示意图

特征波在单元界面的传播方向可近似视为速度差分方向 (如图 1):

$$(\theta)_m + 1/2 = \tan^{-1} [(v_{m+1} - v_m) / (u_{m+1} - u_m)]$$

式中, 下标 m 代表 i 或 j 。

现在, 我们以 θ 方向作为特征波分解的方向, 这样, 与 θ 垂直的速度分量 v_L 与 v_R 相等, 这符合波前后切向速度分量相等的规律, 从而使该格式更符合双曲型方程特征波传播的物理意义。可惜, 数值实验表明, 这种特征波分解方式对 θ 非常敏感, θ 微小的变化能产生非线性反馈, 从而引起 θ 更大的变化, 使得计算不收敛。在实际计算中, 对于定常流场, 一种消除反馈的有效方法是在一定的时间内冻结 θ , 取为 θ_i 直到计算收敛到某一值, 再改变 θ , 重复上述做法, 直到最后收敛。既然 θ 并不是完全意义上的特征波传播方向, 那么至少需要一附加特征向量来消除 θ 与 θ_i 之间的偏差。我们取一沿 θ_i 传播的附加剪切波, 其特征向量为:

$$R_5 = [0, -a \sin \theta_i, a \cos \theta_i, a(-u \sin \theta_i + v \cos \theta_i)]^T \quad (4)$$

其余特征向量形式不变, 只是用 θ_i 取代 θ 。

振幅相应为:

$$\Omega = \begin{bmatrix} (\Delta p / 2a^2) + \beta(\rho / 2a) (\Delta u \cos \theta_i + \Delta v \sin \theta_i) \\ (\Delta p / 2a^2) - \beta(\rho / 2a) (\Delta u \cos \theta_i + \Delta v \sin \theta_i) \\ (\beta - 1)(\rho / a) (\Delta u \cos \theta_i + \Delta v \sin \theta_i) \\ (1/a^2) (a^2 \Delta \rho - \Delta p) \\ (\rho / a) (-\Delta u \cos \theta_i + \Delta v \sin \theta_i) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\beta = \min \left\{ \left[\frac{\Delta p / (\rho a)}{\Delta u \cos \theta_i + \Delta v \sin \theta_i} \right]^2, 1 \right\}$$

这样, 由式(3)即可求通量函数, 进而用式(2)求得 $U_{i,j}^{n+1}$ 。

在处理固体无渗透壁面边界条件时, 我们采用事后修正边界处理的方法, 即:

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\eta_k (n \cdot V)^{\text{Euler}}, \quad \Delta v = -\eta_l (n \cdot V)^{\text{Euler}} \\ \Delta p &= \mp \rho a (n \cdot V)^{\text{Euler}}, \quad \Delta \rho = \Delta p / a^2, \quad q_i^{\text{Exact}} = q_i^{\text{Euler}} + \Delta q_i \end{aligned} \quad (6)$$

式中, q_i^{Euler} 代表由内点格式得到物理量的值, q_i^{Exact} 代表由边界条件及特征关系得到的物理量的值, (η_k, η_l) 为壁面单位法向量。

在进行粘性流动数值模拟时, 为了方便地处理无滑移边界条件, 我们对近壁面网格进行修正, 使 η 网格线严格与壁面垂直。其它方面的处理可参阅文献[6]。

3 算例与计算结果

算例 1: 对带有解析解的 Hobson 叶栅进行了无粘流动的数值模拟, 图 2 是无粘流场的等熵曲线图, 熵值以 p/ρ^γ 定义, 每两条等值线的值相差 10^{-3} 。由对比可以看出, 用改进的 Roe 格式计算所得到的流场的等熵线明显少于用 Roe 格式计算得到流场的等熵线, 这说明改进的 Roe 格式对数值粘性具有明显的抑制作用, 这对计算叶栅流动损失是非常有利的; 图 3 为采用三阶 Roe 格式和改进的二阶 Roe 格式计算得到的壁面速度系数曲线与解析解的对比, 由此可以看出, 改进的 Roe 格式所得的结果更接近于解析解。

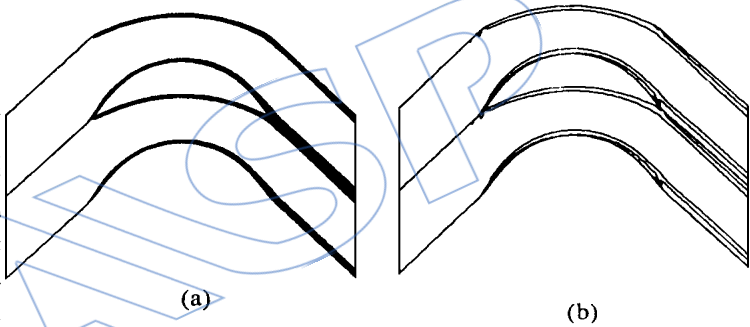


图 2 Hobson 平面叶栅计算通道内等熵分布

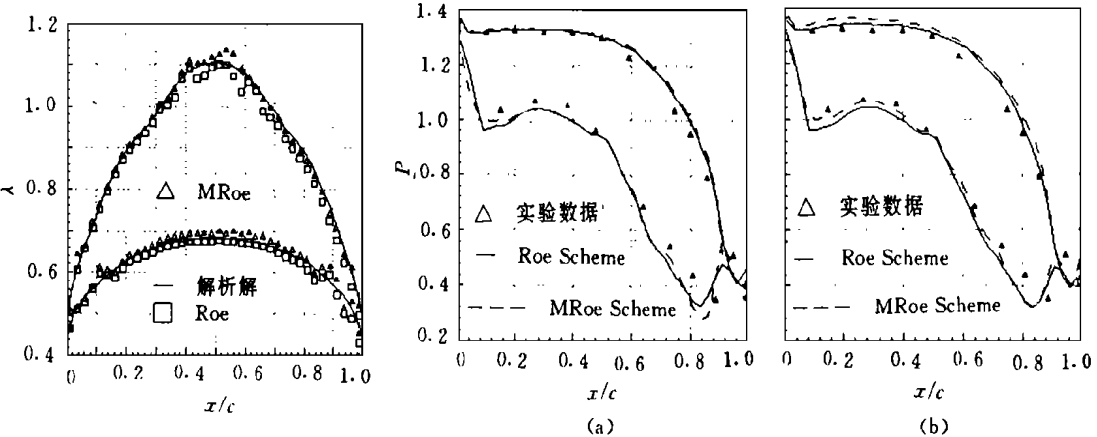


图 3 Hobson 叶栅表面速度系数曲线

图 4 某涡轮叶栅表面压力系数分布

算例 2: 对某涡轮平面叶栅进行了粘性和无粘流动的数值模拟, 并与实验结果进行了比较。图 4 为壁面无量纲压力分布曲线, 粘性和无粘性流动计算结果都表明改进的 Roe 格式比

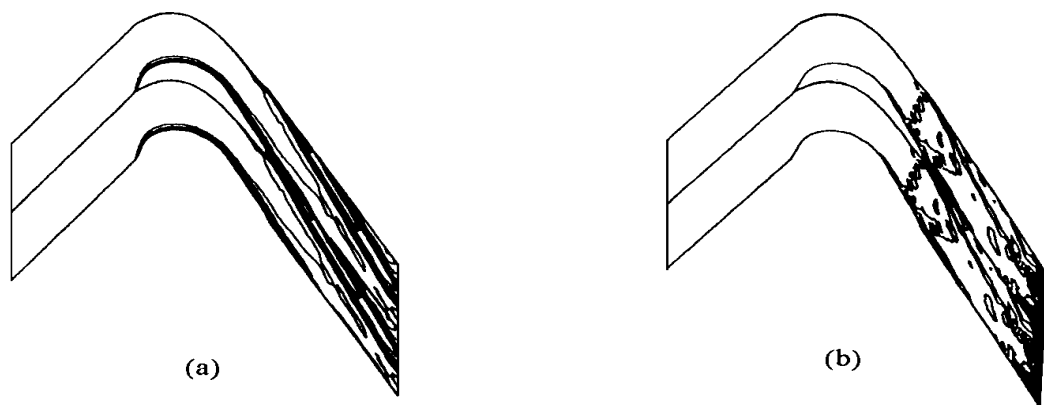


图 5 某平面叶栅计算通道内等熵分布

Roe 更接近实验值, 在激波捕捉方面也优于 Roe 格式。图 5 为等熵曲线图, 得到了与上一算例相类似的结果。另外, 在粘性计算中, 由于进行了近壁面修正, 网格为 S 型, Roe 格式在计算的初期出现振荡, 而改进的 Roe 格式则没有出现这种情况, 所以, 改进的 Roe 格式的 CFL 数要比 Roe 格式所取的大一些。这说明改进的 Roe 格式对于网格的依赖要明显的弱于 Roe 格式。

4 结 论

计算结果表明, 改进的 Roe 格式具有抑制数值粘性和减少网格依赖的优点。由于格式本身符合 Euler 方程的物理特性, 该格式在成功分辨激波位置的同时, 对剪切流动的模拟也优于一般的 Roe 格式。这些性质对叶栅流动的损失预估, 进而进行叶轮机械的设计是非常必要的。尽管该格式还有待于进一步完善, 可以想见, 在复杂跨音速叶栅粘性流动计算中, 该格式及其设计思想会越来越受到重视。

参 考 文 献

- 1 Zhang X D. Grid Influence on Upwind Schemes for the Euler and Navier-Stokes Equations AIAA Journal, 1996, 34(4):
- 2 Vankeirsbilck P. Application of Solution Adaptive Meshes and Multigrid Methods for the Computation of Viscous Compressible Flows Von Karman Inst., VKI Contract Rept., Rhode Saint Genese, Belgium, 1991
- 3 Aftosmis M, Gaitonde D, et al. On the Accuracy, Stability and Monotonicity of Various Reconstruction Algorithms for Unstructured Meshes AIAA Paper 94-0415, 1994
- 4 Christopher L Rumsey, Bram Van Leer, et al. A Multidimensional Flux Function with Applications to the Euler and Navier-Stokes Equations Journal of Computational Physics, 1993, 105
- 5 Roe R L. Approximate Riemann solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes Journal of Computational Physics, 1981, 43: 357- 372
- 6 王保国, 沈孟育. 高速粘性内流的高分辨率、高精度迎风型杂交格式 空气动力学报, 1995, 13(4): 365- 373

NUMERICAL SIMULATION OF 3D TRANSONIC VISCOUS FLOW STRUCTURE INSIDE A COMPRESSOR ROTOR WITH CONSIDERATION OF TIP CLEARANCE

Guo Yanhu, Wang Baoguo, Shen Mengyu

(Dept. of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084)

ABSTRACT A 3D numerical solution of transonic turbulent flow field inside a compressor rotor is analyzed with a consideration of blade tip clearance. The complex vortex system structure and shock wave system structure inside this rotor is obtained. Wall flow patterns on the blade surface and hub surface are found out. The complex vortex system structure, such as horseshoe vortex, passage vortex, corner vortex and trailing vortex, and the interaction with shock wave system are researched. Especially, the character of the tip clearance flow inside the rotor passage is revealed, and the interaction between shock wave and tip clearance flow near blade tip and the evolution of tip clearance flow are considered.

Key Words Compressors Flow fields Transonic flow Leakage
Numerical simulation

APPLICATION OF A MULTI- DIMENSIONAL FLUX FUNCTION TO ANALYSIS OF PLANE TRANSONIC CASCADE FLOW

Yao Shilei, Wang Baoguo, Shen Mengyu

(Dept. of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084)

ABSTRACT In two- or three- dimensional flow fields, it is difficult to determine the direction of wave propagation in cascades due to complexity of transonic flow. Now a grid- independent approximate Riemann solver is applied to numerical simulation of two- dimensional transonic cascade flow by the Euler or Navier- Stokes equations. Fluxes on grid faces are obtained via wave decomposition, assuming that information propagates in the velocity difference directions, rather than in the grid- normal directions as in a standard grid- aligned solver. Second- order computations with the grid- independent flux function are used to analyze two typical examples of transonic cascades. The results indicate that the grid- independent model suppresses entropy production over the cascade surface due to either computational diffusion or grid viscosity, and resolves shock and shear waves in transonic flow of cascades much better.

Key Words Multidimensional analysis Plane cascades Transonic flow

AN EXPERIMENTAL INVESTIGATION ON TREATMENT OF COMPRESSOR CASING WITH SKEW GROOVES

Zhu Junqiang, Zhao Yi, Liu Zhiwei

(7th Dept. Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

ABSTRACT Five kinds of skew grooved cases with different geometric parameters were designed and tested on a rig of single stage axial- flow compressor. The detailed